

Varianta 32

SUBIECTUL I

- a) $BC = 5\sqrt{2}$.
- b) Punctul M este mijlocul $(AC) \Rightarrow M(0, 0)$.
- c) $OA = 5, OB = 5, OC = 5$.
- d) $AB = 5\sqrt{2}, AC = 10, BC = 5\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic.
- e) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2}$.
- f) $\operatorname{Re}(z) = 0$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = 3$.
- b) $2C_n^2 + n = n^2, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
- c) $T_4 = 27$.
- d) Avem trei numere.
- e) $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{1}{4}$.

2.

- a) $f(2) = 2$.
- b) $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$
- d) $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
- e) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = 0$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, și $A^3 = O_3$.
- c) Calcul direct.
- d) $(A + I_3)B = A \cdot B + B \stackrel{c)}{=} I_3$.

e) Din b) $\Rightarrow A^3 = O_3 \Rightarrow A^4 = O_3 \Rightarrow (I_3 + A^2)(I_3 - A^2) = I_3 - A^4 = I_3 \Rightarrow \det((I_3 + A^2)(I_3 - A^2)) = \det(I_3) = 1.$

f) Din b) $\Rightarrow A^3 = O_3 \Rightarrow A^k = O_3 \forall k \geq 3$, deci

$$A + 2A^2 + 3A^3 + \dots + 10A^{10} = A + 2A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Pentru $n=1$ relația este adevărată. Presupunem adevărat că

$$(I_3 + A)^k = \begin{pmatrix} 1 & 3k & 6k^2 \\ 0 & 1 & 4k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și demonstrăm că } (I_3 + A)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 & 6(k+1)^2 \\ 0 & 1 & 4k+4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(I_3 + A)^{k+1} = (I_3 + A)^k (I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 & 6(k+1)^2 \\ 0 & 1 & 4k+4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

b) $f'(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}.$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^2 f'(x) dx = 0.$

d) $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x^3} > 0, \forall x > 1 \Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe $(1, \infty).$

e) Dacă $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x = 1$ este punct de minim global $\Rightarrow$ punctul de extrem este $E(1, 2).$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^4} \right) = \frac{1}{2}.$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{2}^n)}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{2^n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} + \frac{2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{2^n} = 2.$$